8. 4. TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

Przykład 8.4.1.Sprowadź podane wyrażenie do najprostszej postaci

a) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

Rozwiązanie	**Komentarz**
$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=$ $=\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=$	Wykorzystując wzór $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ stosujemy podstawienie : $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}=$	Wyrażenie $1-\cos^2\alpha$ rozkładamy na czynniki stosując wzór skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$=1+\cos\alpha$	Skracamy wyrażenie $1-\cos\alpha$

b) $\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}$

Rozwiązanie	**Komentarz**
$\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=$ $=\frac{tg\alpha\cdot ctg\alpha+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=$	Wykorzystując wzór $tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}$ w liczniku stosujemy podstawienie: $1=tg\alpha\cdot ctg\alpha$
$=\frac{tg\alpha(ctg\alpha+1)}{ctg\alpha+1}=$	W liczniku wyciągamy $tg\alpha$ przed nawias.
$=tg\alpha$	Skracamy wyrażenie $ctg\alpha+1$

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość zawierającą funkcję trygonometryczną, która jest prawdziwa dla każdej wartości kąta (kątów)

Sprawdzenie tożsamości trygonometrycznej polega na doprowadzeniu jej do równości w której z lewej i prawej strony mamy to samo wyrażenie.

Korzysta się przy tym ze wzorów trygonometrycznych, praw działań arytmetycznych oraz wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 8.4.2. Sprawdź , czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną;

a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

Rozwiązanie	Komentarz
$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$ $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$	Przekształcamy lewą stronę równości stosując wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2$	Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.
$2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2$	Z lewej strony równości wyciągamy 2 przed nawias.
$2\cdot1=2$ $2=2$	Stosujemy wzór $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ Po przekształceniach , z lewej i prawej strony równości otrzymujemy 2 , w ten sposób wykazaliśmy, że dana równość jest tożsamością.

b) $\sin^2\alpha\cdot\dfrac{1+tg^2\alpha}{ctg\alpha}=tg^3\alpha$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sin^2\alpha\cdot\dfrac{1+tg^2\alpha}{ctg\alpha}=tg^3\alpha\,/\cdot ctg\alpha$ $\sin^2\alpha(1+tg^2\alpha)=tg^3\alpha\cdot ctg\alpha$	Obie strony równości mnożymy przez $ctg\alpha$
$\sin^2\alpha\left(1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	Wykonujemy podstawienia stosując wzory: $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$	Z lewej strony równości wykonujemy mnożenie. Z prawej strony równości skracamy wyrażenia $\sin\alpha,\cos\alpha$
$\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\,/\cdot\cos^2\alpha$ $\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=\sin^2\alpha$	Obie strony równości mnożymy przez $\cos^2\alpha$
$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=\sin^2\alpha\,/:\sin^2\alpha$ $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ $1=1$	Obie strony równości dzielimy przez $\sin^2\alpha$ Wykorzystując wzór $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ otrzymujemy z lewej i prawej strony równości 1 , w ten sposób wykazaliśmy, że dana równość jest tożsamością

c) $\frac{ctg\alpha - tg\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}$

Rozwiązanie	**Komentarz**
$\frac{ctg\alpha - tg\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}{}_{/\cdot\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}{}_{/\cdot\sin\alpha}$ $\frac{ctg\alpha - tg\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ $\frac{ctg\alpha - tg\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$	Z prawej stromy równości wykonujemy odejmowanie , sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika.
$\sin\alpha\cos\alpha(ctg\alpha - tg\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$	Otrzymana równość jest proporcją. Mnożymy „ na krzyż” liczniki z mianownikami.
$\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$	Wykonujemy podstawienia stosując wzory: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}{}_{/\cdot\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}{}_{/\cdot\sin\alpha}\right) = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$ $\sin\alpha\cos\alpha\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$	Wykonujemy odejmowanie $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika
$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$	Skracamy wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	Z prawej strony równości stosujemy wzór skróconego mnożenia: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ Po przekształceniach , z lewej i prawej strony równości otrzymujemy $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, w ten sposób wykazaliśmy, że dana równość jest tożsamością.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 8.4.1. (1pkt.) Sprowadź podane wyrażenie do najprostszej postaci

$$\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyrażenia w najprostszej postaci.	1

Ćwiczenie 8.4.2. Sprawdź , czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną;

a) (2pkt.) $\frac{tg^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

b) (2pkt.) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie równości bez kresek ułamkowych	1
2	Doprowadzenie lewej i prawej strony równości do tego samego wyrażenia.	1